Tuyển tập Hội nghị khoa học toàn quốc lần thứ nhất về Động lực học và Điều khiển
Đà Nẵng, ngày 19-20/7/2019, tr. 177-182, DOI 10.15625/vap.2019000275

Động lực học tay máy robot có liên kết chương trình

Nguyễn Văn Khang[1)], Nguyễn Văn Quyền[1)], Lương Bá Trường[2)], Nguyễn Văn Long[3)]
[1)]Bộ môn Cơ học ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
[2)]Bộ môn Cơ điện tử, Trường Đại học Thủy Lợi
[3)]Bộ môn Cơ điện tử, Trường Đại học Kinh doanh và Công nghệ Hà Nội
E-mail: [1)]{khang.nguyenvan2, quyen.nguyenvan}@hust.edu.vn, [2)]truonglb@tlu.edu.vn, [3)]chitietmay1011@gmail.com

Tóm tắt
Hệ nhiều vật chịu các liên kết chương trình có thể xem thuộc vào tập hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng. Các phương trình chuyển động của hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng thường là hệ các phương trình vi phân – đại số. Trong báo cáo này trình bày việc áp dụng các phương trình Lagrange dạng nhân tử để thiết lập hệ phương trình vi phân-đại số của hệ nhiều vật chịu các liên kết chương trình. Sau đó trình bày chi tiết một bài toán động lực học thuận robot có liên kết chương trình.

Từ khóa: Tay máy Robot, liên kết chương trình, phương trình vi phân-đại số, phương pháp khử nhân tử Lagrange, động lực học thuận.

1. Mở đầu

Động lực học hệ nhiều vật chịu các liên kết chương trình là lĩnh vực khoa học có ý nghĩa thực tế và đang được quan tâm nghiên cứu [1-7]. Hệ nhiều vật chịu các liên kết chương trình thực chất thuộc vào tập hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng. Để thiết lập phương trình chuyển động của hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng, người ta thường sử dụng phương trình Lagrange dạng nhân tử, phương trình Kane dạng nhân tử, phương pháp tách cấu trúc,… [8, 9]. Các phương trình mô tả chuyển động của hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng thường là hệ các phương trình vi phân – đại số. Các phương pháp giải hệ phương trình vi phân – đại số thường được phân thành hai nhóm:

- Các phương pháp biến đổi hệ phương trình vi phân-đại số về hệ phương trình vi phân thường. Sau đó sử dụng thuật toán số giải hệ phương trình vi phân thường [8,9].
- Các phương pháp số giải trực tiếp hệ phương trình vi phân đại số [8, 9].

Trong bài báo này trình bày việc áp dụng phương pháp khử các nhân tử Lagrange tính toán động lực học thuận robot có liên kết chương trình.

2. Phương pháp số giải phương trình Lagrange dạng nhân tử

Sử dụng phương trình Lagrange dạng nhân tử, chúng ta thu được hệ phương trình vi phân – đại số mô tả chuyển động của hệ nhiều vật hôlônôm chịu liên kết giữ và lý tưởng [8, 9].

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{s},t)\ddot{\boldsymbol{s}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)\dot{\boldsymbol{s}}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{s},t)=\boldsymbol{\tau}(t)-\boldsymbol{\Phi}_s^T(\boldsymbol{s},t)\boldsymbol{\lambda} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s},t)=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

Trong đó $\boldsymbol{s}=[s_1,s_2,\ldots,s_n]^T$ là các toạ độ suy rộng dư, $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{s},\mathrm{t})$ là ma trận khối lượng suy rộng của hệ, $\boldsymbol{\tau}(t)$ là véctơ lực suy rộng ứng với các lực hoạt động không có thế, $\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r]^T$ là véctơ các nhân tử Lagrange, $\boldsymbol{f}=[f_1,f_2,\ldots,f_r]^T$=0 là các điều kiện ràng buộc, $\boldsymbol{\Phi}_s$ là ma trận Jacobi của $\boldsymbol{f}$ cỡ $r\times f$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)$ là ma trận quán tính ly tâm và Coriolis.

Để thuận tiện cách viết ta đưa vào ký hiệu

$$\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)=\boldsymbol{\tau}(\mathrm{t})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)\dot{\boldsymbol{s}}-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{s},t) \tag{3}$$

Phương trình (1) bây giờ có dạng

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{s},\mathrm{t})\ddot{\boldsymbol{s}}+\boldsymbol{\Phi}_s^T(\boldsymbol{s},t)\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{p}_1 \tag{4}$$

Đạo hàm hai lần phương trình liên kết (2) ta thu được các phương trình

$$\dot{\boldsymbol{f}}=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{s}}\dot{\boldsymbol{s}}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}=\mathbb{F}_s\dot{\boldsymbol{s}}+\boldsymbol{f}_t=\boldsymbol{0} \tag{5}$$

$$\ddot{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{\Phi}_s\ddot{\boldsymbol{s}}+\dot{\boldsymbol{\Phi}}_s\dot{\boldsymbol{s}}+\dot{\boldsymbol{f}}_t=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_s\ddot{\boldsymbol{s}}=-(\dot{\boldsymbol{\Phi}}_s\dot{\boldsymbol{s}}+\dot{\boldsymbol{f}}_t)=:\boldsymbol{p}_2 \tag{6}$$

Các phương trình (4) và (6) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{\Phi}_s^T\\ \boldsymbol{\Phi}_s & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{s}}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\end{bmatrix} \tag{7}$$

Xác định các điều kiện đầu của các toạ độ suy rộng phụ thuộc và các vận tốc suy rộng phụ thuộc [10, 11]

Để có thể tích phân được các phương trình vi phân dạng tọa độ dư, thì việc xác định các điều kiện đầu của các tọa độ suy rộng phụ thuộc và vận tốc của chúng là cần thiết. Vì vậy trước tiện ta trình bày vấn đề này.

Khi giải hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật có f bậc tự do, ta phải cho trước f giá trị đầu của các toạ độ suy rộng độc lập và các vận tốc suy rộng độc lập $q_1(0),\ldots,q_f(0),\dot{q}_1(0),\ldots,\dot{q}_f(0)$. Trong hệ phương trình (2) còn có r toạ độ suy rộng dư $z_1(t),\ldots,z_r(t)$. Vì vậy ta còn phải xác định các điều kiện đầu của các toạ độ suy rộng và các vận tốc suy rộng dư. Từ các phương trình (2) và (5) ta có

$$f_j\left(q_1(0),\ldots,q_f(0),z_1(0),\ldots,z_r(0),0\right)=0,\qquad (j=1,..r) \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial f_j}{\partial q_i}\left(0\right)\dot{q}_i(0)+\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\left(0\right)\dot{z}_k(0)+\frac{\partial f_j}{\partial t}(0)=0,\quad (j=1,\ldots,r) \tag{9}$$

Từ phương trình liên kết (8) khi biết $q_1(0),\ldots,q_f(0)$ ta dễ dàng xác định được các giá trị gần đúng của $z_1(0),\ldots,z_r(0)$ (chẳng hạn bằng phương pháp đồ thị). Lấy các giá trị này làm giá trị đầu, giải hệ phương trình đại số phi tuyến (8) bằng phương pháp lặp Newton-Raphson tìm được các giá trị đầu của các toạ độ suy rộng dư khá chính xác.

Để xác định các giá trị đầu của các vận tốc suy rộng dư, ta xét hệ phương trình (9)

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\left(0\right)\dot{z}_k(0)=-\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial f_j}{\partial q_i}\left(0\right)\dot{q}_i(0)-\frac{\partial f_j}{\partial t}(0),\quad (j=1,\ldots,r) \tag{10}$$

Hệ (10) là hệ *r* phương trình đại số tuyến tính của r ẩn là $\dot{z}_1(0),\ldots,\dot{z}_r(0)$. Giải hệ phương trình đại số này ta xác định được các giá trị đầu của các vận tốc suy rộng dư.

***Phương pháp khử các nhân tử Lagrange* [8, 9, 12]**

Khử các nhân tử Lagrange, biến đổi hệ phương trình vi phân đại số (1), (2) về hệ phương trình vi phân thường với số phương trình bằng số tọa độ suy rộng có dư của hệ.

Từ (4) ta suy ra

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{s}}+\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{\Phi}_s^T\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{p}_1 \tag{11}$$

Trong đó $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{z})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ -\boldsymbol{\Phi}_z^{-1}\boldsymbol{\Phi}_q\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{\Phi}_z=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial z_r}\\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ \frac{\partial f_r}{\partial z_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_r}{\partial z_r}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Phi}_q=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial q_f}\\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ \frac{\partial f_r}{\partial q_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_r}{\partial q_f}\end{bmatrix}$$

Sử dụng định lý trực giao [9]

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{\Phi}_s^T=\boldsymbol{0} \tag{12}$$

Từ (11) ta có

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{s}}=\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{p}_1 \tag{13}$$

Hệ hai phương trình (13) và (6) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{M}\\ \boldsymbol{\Phi}_s\end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{s}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_3\end{bmatrix} \tag{14}$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{M}\\ \boldsymbol{\Phi}_s\end{bmatrix} \tag{15}$$

thì từ (14) ta suy ra hệ phương trình vi phân sau :

$$\ddot{\boldsymbol{s}}=\boldsymbol{D}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t) \tag{16}$$

Hệ (16) là phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng trong dạng các toạ độ suy rộng có dư.

Chú ý : Phương pháp tích phân số phương trình (16) thường gặp phải các sai số tích phân. Sau mỗi bước tích phân, do sai số tính toán, các giá trị $\boldsymbol{s}_i,\dot{\boldsymbol{s}}_i$ không còn thỏa mãn các phương trình ràng buộc vị trí và phương trình ràng buộc vận tốc và dẫn đến các sai lệch:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}_k,t_k)\neq\boldsymbol{0},k=1,2,\ldots,\ \dot{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{s}_k,\dot{\boldsymbol{s}}_k,t_k)\neq\boldsymbol{0},k=1,2,\ldots \tag{17}$$

Theo phương pháp Baumgarte, thay vì giải phương trình

$$\ddot{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)=\boldsymbol{0}$$

ta sẽ tiến hành giải phương trình:

$$\ddot{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)+2\alpha\dot{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)+\beta^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s},t)=\boldsymbol{0} \tag{18}$$

Trong đó các hệ số được chọn thỏa mãn điều kiện sau: $0<\alpha\leq\beta$. Các số hạng $2\alpha\dot{\boldsymbol{f}}$ và $\beta^2\boldsymbol{f}$ đóng vai trò số hạng điều khiển. Nhờ việc sử phương trình (18) thay cho phương trình (6) ta sẽ khử dần hoặc khử hoàn toàn được sai số tích lũy trong quá trình tích phân. Như thế thay cho giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{s},\mathrm{t}\right)\ddot{\boldsymbol{s}}+\boldsymbol{\Phi}_s^T\left(\boldsymbol{s},t\right)\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{p}_1\left(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t\right)=\boldsymbol{0}\\ &\ddot{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{19}$$

ta sẽ tiến hành giải hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{s},\mathrm{t}\right)\ddot{\boldsymbol{s}}+\boldsymbol{\Phi}_s^T\left(\boldsymbol{s},t\right)\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{p}_1\left(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t\right)=\boldsymbol{0}\\ &\ddot{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)+2\alpha\dot{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)+\beta^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s},t)=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{20}$$

Hệ phương trình (20) có thể viết lại dưới dạng ma trận

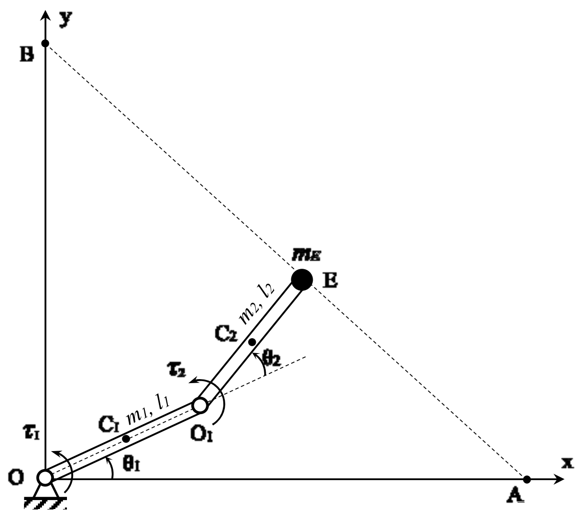
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{s},t\right) & \boldsymbol{\Phi}^T\left(\boldsymbol{s},t\right)\\ \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{s},\mathrm{t}\right) & \boldsymbol{0}_{r\times r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{s}}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)\\ \boldsymbol{p}_3(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)\end{bmatrix} \tag{21}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_3(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t)&=\boldsymbol{p}_2\left(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},t\right)-2\alpha\left[\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{s},\mathrm{t}\right)\dot{\boldsymbol{s}}+\boldsymbol{f}_t\right]-\beta^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s},t)\\ &=-\left[\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\boldsymbol{s}}\left(\boldsymbol{E}_n\otimes\dot{\boldsymbol{s}}\right)+\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t}+2\alpha\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{s},\mathrm{t}\right)\right]\dot{\boldsymbol{s}}-2\alpha\boldsymbol{f}_t-\boldsymbol{f}_{tt}\end{aligned} \tag{22}$$

3. Bài toán động lực học thuận tay máy robot hai khâu có liên kết chương trình

Áp dụng phương pháp giải hệ phương trình vi phân – đại số trình bày ở mục trên, ta nghiên cứu bài toán động lực học thuận tay máy robot hai khâu có liên kết chương trình như hình 1. Liên kết chương trình ở đây là đòi hỏi điểm thao tác E chuyển động trên một quỹ đạo cho trước. Cho tay máy 2 khâu chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Thanh OO_1 đồng chất chiều dài l_1, khối lượng m_1, khối tâm tại C_1. Thanh O_1E đồng chất chiều dài l_2, khối lượng m_2, khối tâm tại C_2. Điểm thao tác E có khối lượng m_E chuyển động trên đường thẳng AB.



Hình 1. Tay máy Robot hai khâu

Chọn các tọa độ suy rộng là θ_1 và θ_2. Mômen quán tính khối đối với trục quay đi qua khối tâm của các khâu lần lượt là $J_{C_1} = \frac{1}{12} m_1 l_1^2,\ J_{C_2} = \frac{1}{12} m_2 l_2^2$

Vận tốc góc của các khâu: $\omega_1 = \dot{\theta}_1, \omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$.

Tọa độ các khối tâm và điểm thao tác

$$\begin{bmatrix} x_{C_1} \\ y_{C_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2}\cos\theta_1 \\ \frac{l_1}{2}\sin\theta_1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x_{C_2} \\ y_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\cos\theta_1 + \frac{l_2}{2}\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) \\ l_1\sin\theta_1 + \frac{l_2}{2}\sin\left(\theta_1+\theta_2\right) \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) \\ l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\left(\theta_1+\theta_2\right) \end{bmatrix} \tag{24}$$

Động năng của tay máy:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1}\omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{C_2}^2 + \frac{1}{2} J_{C_2}\omega_2^2 + \frac{1}{2} m_E v_E^2$$

Với $v_{C_1}^2 = \dot{x}_{C_1}^2 + \dot{y}_{C_1}^2; v_{C_2}^2 = \dot{x}_{C_2}^2 + \dot{y}_{C_2}^2; v_E^2 = \dot{x}_E^2 + \dot{y}_E^2$

Ta dễ dàng tính được biểu thức động năng của tay máy:

$$\begin{aligned} T = & \begin{bmatrix} \left(\frac{m_1}{6} + \frac{m_2 + m_E}{2}\right) l_1^2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_E\right) l_1 l_2 \cos\theta_2 \\ + \left(\frac{m_2}{6} + \frac{m_E}{2}\right) l_2^2 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ & + \left[\left(\frac{m_2}{2} + m_E\right) l_1 l_2 \cos\theta_2 + \left(\frac{m_2}{3} + m_E\right) l_2^2\right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & + \left(\frac{m_2}{6} + \frac{m_E}{2}\right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \tag{25}$$

Thế năng của tay máy:

$$\begin{aligned} \Pi &= m_1 g y_{C_1} + m_2 g y_{C_2} + m_E g y_E \\ &= \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_E\right) l_1 \sin\theta_1 + \left(\frac{m_2}{2} + m_E\right) l_2 \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right) \end{aligned} \tag{26}$$

Các lực suy rộng của các lực hoạt động không thế

$$Q_1^* = \tau_1, Q_2^* = \tau_2 \tag{27}$$

Phương trình ràng buộc điểm thao tác E luôn chuyển động trên một đường thẳng AB

$$\frac{x_E - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_E - y_A}{y_B - y_A} \quad \text{hay} \quad \frac{x_E}{l_3} + \frac{y_E}{l_4} - 1 = 0$$

Thay tọa độ điểm E từ (24) vào phương trình ràng buộc trên ta có phương trình liên kết:

$$\begin{aligned} f\left(\theta_1, \theta_2\right) &= l_1 l_3 \sin\theta_1 + l_1 l_4 \cos\theta_1 \\ &+ l_2 l_3 \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right) + l_2 l_4 \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) - l_3 l_4 = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

Sử dụng phương trình Lagrange loại 2 dạng nhân tử

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_k} + Q_k^* - \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta_k} \qquad \left(k = 1, 2\right)$$

Ta thu được hai phương trình chuyển động của robot.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \left(\frac{m_1}{3} + m_2 + m_E\right) l_1^2 + \left(m_2 + 2m_E\right) l_1 l_2 \cos\theta_2 \\ + \left(\frac{m_2}{3} + m_E\right) l_2^2 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ & + \left[\left(\frac{m}{2} + m_E\right) l_1 l_2 \cos\theta_2 + \left(\frac{m_2}{3} + m_E\right) l_2^2\right] \ddot{\theta}_2 \\ & - \left(m_2 + 2m_E\right) l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_E\right) l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \\ & + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_E\right) g l_1 \cos\theta_1 \\ & + \left(\frac{m_2}{2} + m_E\right) g l_2 \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) \\ & = \tau_1 - \lambda \begin{pmatrix} l_1 l_3 \cos\theta_1 - l_1 l_4 \sin\theta_1 \\ + l_2 l_3 \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) - l_2 l_4 \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{m_2}{2} + m_E\right) l_1 l_2 \cos\theta_2 + \left(\frac{m_2}{3} + m_E\right) l_2^2\right] \ddot{\theta}_1 \\ & + \left(\frac{m_2}{3} + m_E\right) l_2^2 \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_E\right) l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 \\ & + \left(\frac{m_2}{2} + m_E\right) g l_2 \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) \\ & = \tau_2 - \lambda_1 \left(l_2 l_3 \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) - l_2 l_4 \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right) \end{aligned} \tag{30}$$

Các phương trình vi phân (29), (30) và phương trình đại số (28) tạo thành hệ 3 phương trình vi phân – đại số mô tả chuyển động của tay máy robot.

4. Mô phỏng số

Để giải hệ phương trình vi phân đại số trên ta cần biết các tham số của hệ và các điều kiện đầu. Các tham số của robot được cho như sau

$l_1 = 2\left[m\right],\ l_2 = 3.5\left[m\right],\ l_3 = 5\left[m\right], l_4 = 5\left[m\right],$

$m_1 = 200\left[kg\right],\ m_2 = 35\left[kg\right],\ m_E = 25\left[kg\right],$

$J_1 = 450\left[kg \cdot m^2\right], J_2 = 35\left[kg \cdot m^2\right].$

Giả sử các lực tác dụng lên các khâu dẫn có dạng

$\tau_1 = 0.1 \cdot \sin(2\pi t)\left[N \cdot m\right],$

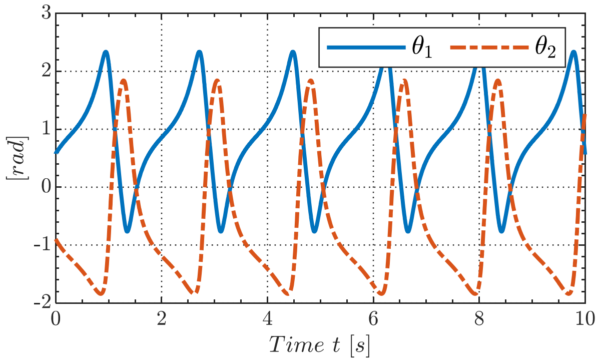
$\tau_2 = 0.1 \cdot \sin(2\pi t) + 15000\left[N \cdot m\right].$

Các điều kiện đầu của các tọa độ suy rộng độc lập được cho trước, còn điều kiện đầu của các tọa độ suy rộng dư được xác định từ phương trình liên kết. Ta có

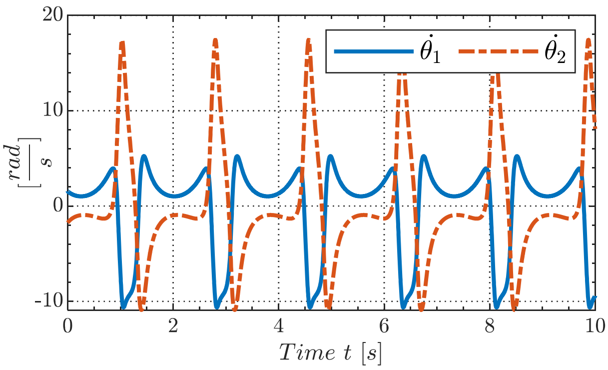
$$\theta_1(0) = 0.5781\left[rad\right], \dot{\theta}_1(0) = 1.5457\left[\frac{rad}{s}\right],$$

$$\theta_2(0) = -0.8957\left[rad\right], \dot{\theta}_2(0) = -1.7494\left[\frac{rad}{s}\right].$$

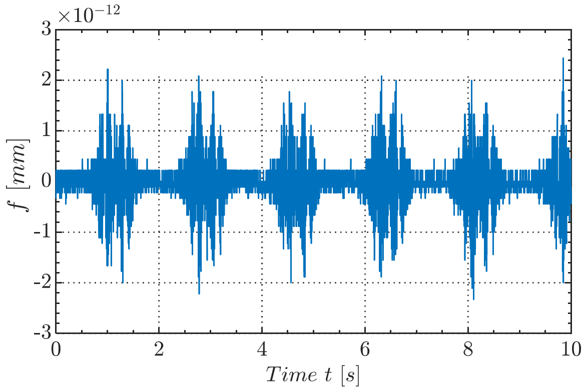
Sử dụng phần mềm MATLAB tính toán mô phỏng số. Một phần các kết quả tính toán được trình bày trên các hình từ 2 đến 9. Trong đó hình 2 là đồ thị các góc quay θ_1 và θ_2. Hình 3 là đồ thị vận tốc các góc này. Hình 4 là đồ thị biểu thị sai số tính toán thể hiện qua phương trình liên kết. Kết quả trên đồ thị này cho ta độ chính xác rất cao của thuật toán.



Hình 2. Đồ thị các góc khớp

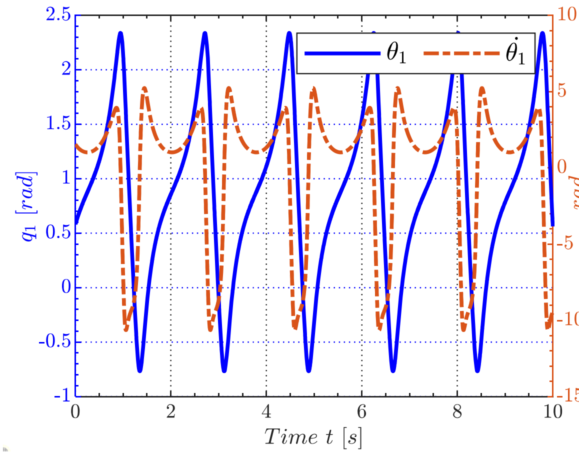


Hình 3. Đồ thị các vận tốc góc khớp

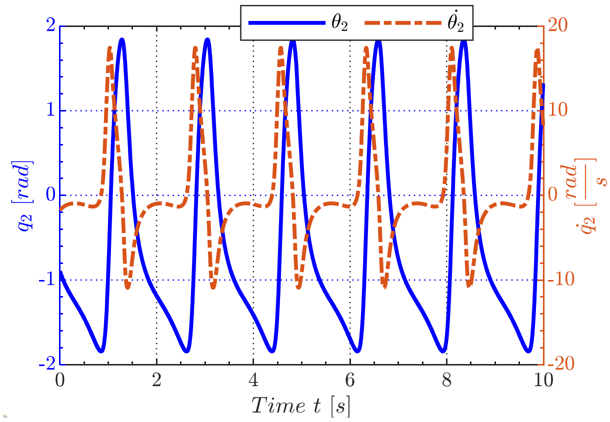


Hình 4. Sai số của phương trình liên kết

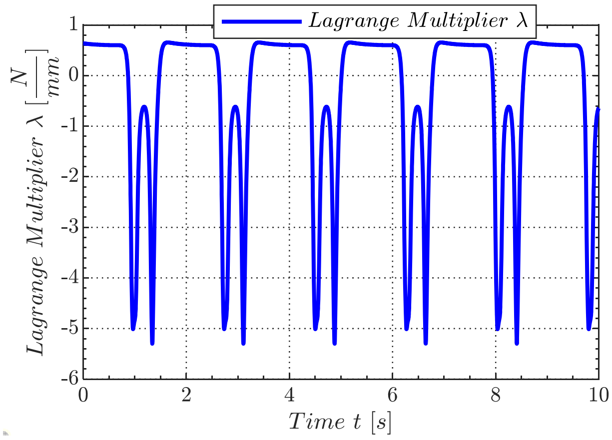
Để có thể kiểm tra độ chính xác của thuật toán chúng ta biểu diễn dịch chuyển góc và vận tốc góc trên cùng một hình vẽ như hình 5 và 6. Trong đó hình 5 là đồ thị của θ_1 và $\dot{\theta}_1$ còn hình 6 là đồ thị của θ_2 và $\dot{\theta}_2$. Hình 7 là đồ thị nhân tử Lagrange. Trong [9] đã chỉ ra ý nghĩa của nhân tử Lagrange.



Hình 5. Đồ thị θ_1 và $\dot{\theta}_1$

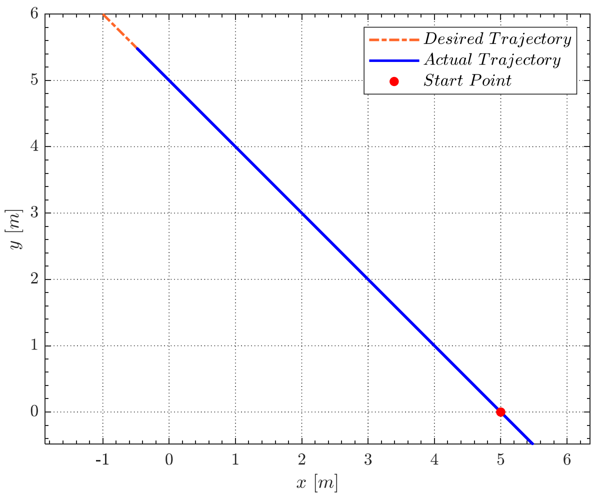


Hình 6. Đồ thị θ_2 và $\dot{\theta}_2$

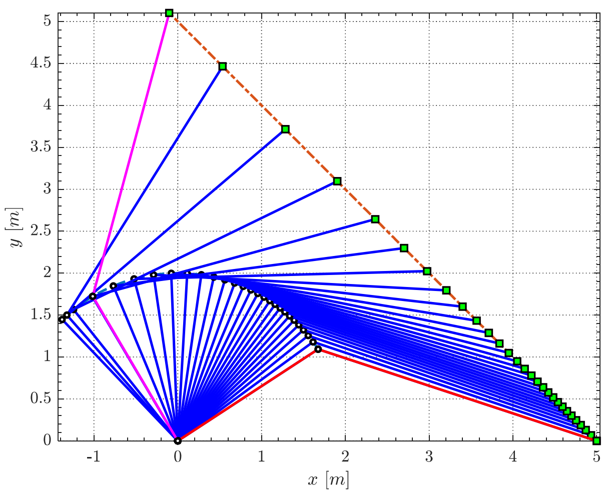


Hình 7. Đồ thị nhân tử Lagrange theo thời gian

Một trong các yêu cầu của bài toán động lực học tay máy robot có liên kết chương trình là kiểm tra xem điểm thao tác E (hoặc khâu thao tác) có thực hiện đúng chuyển động trên quỹ đạo chương trình hay không. Vấn đề này trong các tài liệu [1-7] chưa được đề cập đến. Trong bài báo này chúng tôi đặc biệt quan tâm đến vấn đề này. Dựa trên kết quả giải hệ phương trình vi phân đại số, trên hình 8 biểu diễn quỹ đạo chuyển động của điểm thao tác E.



Hình 8. Quỹ đạo điểm E trong mặt phẳng



Hình 9. Cấu hình của robot

Trên hình 9 biểu diễn cấu hình của tay máy (robot arm configuration) theo thời gian. Trong đó đường màu đỏ là vị trí ban đầu của tay máy, đường màu tím là vị trí cuối của tay máy.

5. Kết luận

Động lực học tay máy robot chịu các liên kết chương trình là bài toán có ý nghĩa khoa học và thực tế. Bài toán này liên quan trực tiếp với bài toán lập trình quỹ đạo cho chuyển động robot. Trong bài báo này đã trình bày các nghiên cứu về bài toán động lực học thuận robot có liên kết chương trình. Các kết quả mô phỏng số cho thấy phương pháp nghiên cứu và thuật toán đề xuất có khả năng áp dụng cao. Bài toán động lực học ngược đang được nghiên cứu trong nhóm và sẽ công bố trong thời gian tới.

Lời cảm ơn

Bài báo này được hoàn thành với sự tài trợ bởi Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia (NAFOSTED).

Tài liệu tham khảo

[1] Rosen A., E. Edelstein, *Investigation of a new formulation of the Lagrange method for constrained dynamic systems*, ASME-Journal of Applied Mechanics, vol. 64, pp.116-122, 1987.

[2] Rosen A., *Applying the Lagrange method to solve problems of control constraints*, ASME-Journal of Applied Mechanics, vol. 66, pp.1013-1015, 1989.

[3] Jankowski K., *Dynamics of controlled mechanical systems with material and program constraints - I Theory*, Mechanism and Machine Theory, vol.24, No.3, pp.175-179, 1989.

[4] Jankowski K., *Dynamics of controlled mechanical systems with material and program constraints-II Methods of solution*, Mechanism and Machine Theory, vol.24, No.3, pp.181-185, 1989.

[5] Jankowski K., *Dynamics of controlled mechanical systems with material and program constraints-III Illustrative examples*, Mechanism and Machine Theory, vol.24, No.3, pp.187-193, 1989.

[6] Do Sanh, Dinh Văn Phong, Do Dang Khoa, Tran Duc, *Control of program motion of dynamic system using relative motion*, Technische Mechanik, Band 28, Heft 3-4, pp. 211-218, 2008.

[7] Vu Duc Binh, Do Dang Khoa, Phan Dang Phong, Do Sanh, *Program motion of unloading manipulatos*, Vietnam Journal of Science and Technology 56(5), 662-670, Hanoi 2018.

[8] De Jalon J. G., E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[9] Nguyễn Văn Khang: *Động lực học hệ nhiều vật (in lần thứ 2)*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2017.

[10] Nguyen Van Khang: *Ein Beitrag zur dynamischen Analyse ebener Koppelgetriebe mit mehreren Freiheitsgraden mit Hilfe der numerischen Lösung der Bewegungsdifferentialgleichungen*. Diss. A, TH Karl-Marx-Stadt, 1973.

[11] Nguyen Van Khang, *Über eine Methode zur Lösung der Bewegungs- gleichungen von Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden*. WZ der TH Karl-Marx-Stadt 17, N.1, S.59-70, 1975.

[12] Nguyễn Văn Khang, Nguyễn Văn Quyền, *Nghiên cứu so sánh một vài phương pháp giải hệ phương trình vi phân-đại số của hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng*. Tuyển tập Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc, 03-05/8/2015, Tập 2, Tr. 147-158, Đà Nẵng 2016.